Concours d'accès au cycle préparatoire aux concours d'agrégation de mathématiques

Première épreuve | Session 2018

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel éléctronique est strictement interdit.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Problème 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par ω_n le nombre complexe $\omega_n = \exp(\frac{2i\pi}{n})$ et par $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité, c'est-à-dire :

$$\mathbb{U}_n = \left\{1, \omega_n, \omega_n^2, ..\omega_n^{n-1}\right\} = \left\{\omega_n^k : 1 \leq k \leq n\right\}.$$

On rappelle que l'ordre de z dans le groupe $\mathbb{U}_n$ est le plus petit entier strictement positif m vérifiant $z^m = 1$.
Pour tous p et $k \in \mathbb{N}^*$, $p \wedge k$ désigne le PGCD de p et k.

Partie A

Soit $z \in \mathbb{U}_n$.
* On dit que z est une *racine n-ième primitive* de l'unité si l'ordre de z dans $\mathbb{U}_n$ est n.
*Pour tout entier $m \geq 1$, on note $\mathcal{R}_m$ l'ensemble des racines m-ième primitives de l'unité et $\varphi(m)$ le cardinal de l'ensemble $\mathcal{R}_m$.

1. Expliciter $\mathcal{R}_m$ et $\varphi(m)$ pour $m = 2, 3$ et 4.

2. Soient $k \in \{1, ..., n\}$. Montrer que l'ordre de ω_n^k dans $\mathbb{U}_n$ est $\dfrac{n}{n \wedge k}$.

3. En déduire que
$$\mathcal{R}_n = \left\{\omega_n^k : 1 \leq k \leq n \text{ et } n \wedge k = 1\right\}.$$

4. Expliciter $\mathcal{R}_n$ et $\varphi(n)$ dans le cas où n est un nombre premier.

5. Montrer que $\mathbb{U}_n$ est la réunion disjointe des ensembles $\mathcal{R}_d$ quand d parcourt l'ensemble des diviseurs positifs de n.

6. En déduire l'égalité :
$$n = \sum_{d/n} \varphi(d),$$
où la somme est considérée sur les diviseurs positifs d de n.

Partie B

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $\Phi_m(X) = \prod\limits_{z \in \mathcal{R}_m} (X - z)$ est appelé le *polynôme cyclotomique* d'indice m.

7. Soit p un nombre premier. Montrer que $\Phi_p(X) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} X^k$.

8. Démontrer l'égalité
$$X^n - 1 = \prod_{d/n} \Phi_d(X)$$
où le produit est considéré sur les diviseurs positifs d de n.

9. Soient A et $B \in \mathbb{Z}[X]$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On suppose que B est unitaire. Soit $A = BQ + R$ la division eulidienne de A par B dans $\mathbb{C}[X]$. Montrer que le quotient Q et le reste R sont dans $\mathbb{Z}[X]$.

   (On pourra raisonner par récurrence sur le dégré du polynôme A).

10. En déduire que $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

Problème 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et r un entier tel que $0 \leq r \leq n$.
On désigne par :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients réels .
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels.
- $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- ${}^tA$ la matrice transposée de A et $rg\,(A)$ le rang de A, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On rappelle que deux matrices A et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont dites équivalentes s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R})$ tels que $A = P.B.Q$.
On admet que deux matrices A et $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ sont équivalentes si, et seulement si, $rg\,(A) = rg\,(B)$.

L'objectif de ce problème est d'étudier la dimension maximale des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formés par des matrices de rang inférieur où égal à r.
Les parties A et B sont indépendantes. La partie C utilise les résultats des parties A et B.

Partie A. Préliminaires

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que ${}^tX.X = 0$. Montrer que $X = 0$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\ker({}^tM.M) = \ker(M)$.
3. Soit $A \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ et M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$
   (a) Soit $K \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$. Calculer le produit : $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ K & I_{n-r} \end{pmatrix}.M$.

   (b) Montrer que la matrice M est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$.

   (c) En déduire que $rg(M) = r$ si et seulement si $D - CA^{-1}B = 0$.

Partie B

Soit V un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que V vérifie la propriété P_r si :

i. Pour toute matrice M dans V, $rg\,(M) \leq r$.

ii. V contient au moin une matrice de rang r.

Exemples:

4. Soit V l'ensemble des matrices M dont les $(n-r)$ premières colonnes sont nulles. Montrer que V vérifie la propriété P_r. Déterminer la dimension de V.

5. Soit $V = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\colon\ \mathrm{tr}(M) = 0\}$. Montrer que V vérifie la propriété P_n.

6. Soit $\mathcal{W}_r = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & A \end{pmatrix} : A \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}),\ B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}) \right\}$. Justifier que $\mathcal{W}_r$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n-r)$.

Partie C

Dans cette partie, V est un **sous espace vectoriel** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie la propriété P_r. On se propose de montrer que $\dim V \leq nr$.
Soit J_r la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. **Cas particulier** : On suppose dans cette question que la matrice J_r appartient à V.

   (a) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & A \end{pmatrix} \in V \cap \mathcal{W}_r$. Montrer que pour tout $\lambda \neq 0$, la matrice
   $$\begin{pmatrix} \lambda I_r & B \\ {}^tB & A \end{pmatrix} \in V$$
   .

   (b) Montrer que $A = \dfrac{1}{\lambda}\,{}^tB.B$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$. (On pourra utiliser la partie A)

   (c) En déduire que $A = {}^t B.B = 0$, puis que $B = 0$.

   (d) En déduire que $\dim V + \dim \mathcal{W}_r \leq n^2$ et conclure.

8. **Cas général.**

   (a) Justifier l'existence de deux matrices inversibles $P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que
   $$J_r \in V' := PVQ = \{P.A.Q\colon\ A \in V\}\,.$$

   (b) En déduire que $\dim V \leq nr$.

9. **Application** : Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient au moins une matrice inversible.

Concours d'accès au cycle préparatoire aux concours d'agrégation de mathématiques

Deuxième épreuve Session 2018

Durée : 4 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel éléctronique est strictement interdit.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Problème 1.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. On notera

$$A(f) = \{p \in \mathbb{R};\ t \longmapsto e^{-pt} f(t) \text{ soit intégrable sur } \mathbb{R}_+\},$$

et pour tout $p \in A(f)$, on pose $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$.
La fonction F est la transformée de Laplace de f. On la notera souvent $\mathcal{L}[f]$.

1. Vérifier que $A(f)$ est soit $\mathbb{R}$, soit vide, soit une demi-droite de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$. On note alors

$$\sigma(f) = \begin{cases} \inf(A(f)) \text{ lorsque cette borne inférieure existe} \\ -\infty \text{ si } A(f) = \mathbb{R} \\ +\infty \text{ si } A(f) = \emptyset \end{cases}$$

l'élément $\sigma(f)$ de $\bar{\mathbb{R}}$ est appelé l'abscisse de convergence de f. L'ensemble $A(f)$ est l'ensemble de convergence.

2. Exemples de calcul:

   (a) Soit $f_1 : t \to t^n$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sigma(f_1) = 0$ et $\mathcal{L}[f_1](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

   (b) Soit $f_2 : t \to e^{at}$, $a \in \mathbb{C}$. Montrer que $\sigma(f_2) = \Re e(a)$ et $\mathcal{L}[f_2](p) = \frac{1}{p-a}$.

   (c) Soit $f_3 : t \to \sin(wt)$, $w > 0$. Montrer que $\sigma(f_3) = 0$ et $\mathcal{L}[f_3](p) = \frac{w}{p^2+w^2}$.

   (d) Soit $f_4 : t \to \cos(wt)$, $w > 0$. Montrer que $\sigma(f_4) = 0$ et $\mathcal{L}[f_4](p) = \frac{p}{p^2+w^2}$.

3. Deux propriétés élémentaires de la transformée de Laplace: On suppose que $A(f) \neq \emptyset$.

   (a) Montrer que la fonction $\mathcal{L}[f]$ est continue sur $A(f)$.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{p \longmapsto +\infty} \mathcal{L}[f](p) = 0$.

4. Quelques résultats théoriques:

   (a) On suppose que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $\mathcal{L}[f^{(n)}](p)$ pour $p \in \bigcap\limits_{k=0}^{n} A\left(f^{(k)}\right)$.

   (b) Théorème de la valeur initiale: On suppose que $\sigma(f) < +\infty$. Montrer que:

   $$\lim_{p \longmapsto +\infty} p\mathcal{L}[f](p) = f\left(0^+\right).$$

   (c) Théorème de la valeur finale: On suppose que f possède une limite finie en $+\infty$. Montrer que $\mathcal{L}[f]$ est définie (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

   $$\lim_{p \longmapsto 0^+} p\mathcal{L}[f](p) = \lim_{t \longmapsto +\infty} f(t).$$

5. Injectivité de la transformation de Laplace:

   (a) Soit $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que:

   $$\left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 h(u)\, u^n du = 0\right) \Longrightarrow h = 0.$$

   (b) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, soient $p \in A(f)$ et $a > 0$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) = \int_0^t e^{-pu} f(u)\, du$. Montrer que

   $$\mathcal{L}[f](p+a) = a\mathcal{L}[g](a).$$

      1. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}[f](p+na) = 0$. Démontrer que

      $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 g\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right) u^n du = 0,$$

      2. En déduire que g est nulle.

(c) Montrer alors que si une fonction f, continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant $\sigma(f) < +\infty$, est telle que

$$\forall p \in A(f),\ \mathcal{L}[f](p) = 0,$$

alors f est nulle sur $\mathbb{R}_+$.

6. Exemple d'utilisation de la transformation de Laplace: Résoudre, en utilisant la transformation de Laplace, dans $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} x'' - 2x' = \cos 3t \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = -1 \end{cases}.$$

Problème 2.

Partie I :

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, Ω un ouvert non borné de $\mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue vérifiant:
(i) $f(x) \longrightarrow +\infty$ quand $x \in \Omega$ et $||x|| \longrightarrow +\infty$ où $||.||$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$.
(ii) $\forall a \in Fr(\Omega) = \bar{\Omega} \backslash \Omega$ et pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans Ω convergente vers a on a $\lim_{n\longmapsto+\infty} f(x_n) = +\infty$.
Soit $b \in \Omega$ et posons $A_b = \{x \in \Omega;\ f(x) \leq f(b)\}$.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans A_b convergente vers $l \in \mathbb{R}^d$.
   (a) Montrer que $l \notin Fr(\Omega)$.
   (b) Déduire que A_b est une partie fermée de $\mathbb{R}^d$.
   (c) Conclure que A_b est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^d$.
2. Montrer qu'il existe $\bar{x} \in \Omega$ tel que:

$$f(x) \geq f(\bar{x}),\ \forall x \in \Omega.$$

Partie II :

On désigne par θ la partie de $\mathbb{R}^2$ donnée par:

$$\theta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y < 0 \text{ et } xy < -1\}.$$

1. Montrer que θ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
2. Représentrer graphiquement θ.

3. Montrer que $Fr\,(\theta) = \bar{\theta} \backslash \theta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y < 0 \text{ et } xy = -1\}$.

On considère l'application

$$f: \begin{array}{l} \theta \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x - y + \frac{x-y}{-1-xy} \end{array}.$$

4. Montrer qye f est une application de classe C^1 sur θ.

5. Montrer que f vérifie les propriétés (i) et (ii) de la partie I.

6. Déterminer les points critiques de f c'est-à-dire les points $(x, y) \in \theta$ tels que $\nabla f\,(x, y) = (0, 0)$.

7. Conclure que:
$$\forall\,(x, y) \in \theta,\ \frac{(x-y)\,xy}{1+xy} \geq 3\sqrt{3},$$
et que l'inégalité est atteinte en un point que l'on déterminera.

Concours d'accès au cycle préparatoire aux concours d'agrégation de mathématiques

Deuxième épreuve — Session 2016

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel éléctronique est strictement interdit.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations et Rappels

1. On muni $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \, \overline{y_k}$ et de la norme associée $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
2. On note $\mathbf{M}_{n,p} = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace des matrices à n lignes, à p colonnes et à coefficients complexes. On écrit $\mathbf{M}_n = \mathbf{M}_{n,n}$.
3. Si $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_{n,p}$, on note $A^* = (b_{ij})$ avec $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$.
   En particulier, si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1} = \mathbb{C}^n$, alors $x^* = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n})$.
4. On note $\mathbf{H}_n = \Big\{ A \in \mathbf{M}_n; \quad A = A^* \Big\}$ l'espace des matrices hermitiennes de taille n.
5. On dit que $A \in \mathbf{M}_n$ est unitaire si $AA^* = I_n$.
6. On dit qu'une matrice $A \in \mathbf{M}_n$ est positive, et on écrit $A \geq 0$, si $x^*Ax \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$.
7. On dit qu'une matrice $A \in \mathbf{M}_n$ est définie positive, et on écrit $A > 0$, si $x^*Ax > 0$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$.
8. On note par $\mathbf{M}_n^+$ l'ensemble des matrices positives.

9. Si $A, B \in \mathbf{M}_n$, on écrit $A \geq B$ si $A - B \geq 0$.

10. Si $J \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ on note A^J la matrice obtenue de A en supprimant les lignes et colonnes d'indices j, $j \notin I$. Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, alors $A^{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$.

11. On rappelle le résultat suivant :
Théorème. *Soit $A \in \mathbf{H}_n$, alors il existe une matrice unitaire P et une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ à coefficients réels vérifiant*
$$A = P^* DP.$$
Si de plus A est positive, les λ_i sont positives et on peut écrire $A = B^2$ avec $B = B^* \geq 0$. Si A est définie positive, les λ_i sont strictement positives et la matrice positive B vérifiant $A = B^2$ est unique.

Exercice

Dans tout l'exercice, la lettre p désigne un entier naturel vérifiant $p \geq 2$. Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note

$$\mathbf{Com}(A) = \Big\{ M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}); \quad MA = AM \Big\} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}[A] = \Big\{ P(A); \quad P \in \mathbb{R}[X] \Big\}.$$

On note
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

Soit $\mathcal{B} = \Big(E_1, E_2, \cdots, E_p\Big)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

1) Déterminer les puissances $\mathbf{J}^k$ de $\mathbf{J}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) Donner une base de $\mathbb{R}[\mathbf{J}]$ et sa dimension.

3) Montrer que $\left(\mathbf{J}^k E_p\right)_{0 \leq k \leq p-1}$ est une base de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

4) Soit $M \in \mathbf{Com}(A)$.

- **a)** Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $ME_p = Q(\mathbf{J})E_p$.
- **b)** En déduire que $M = Q(\mathbf{J})$.

5) Démontrer que $\mathbf{Com}(A) = \mathbb{R}[\mathbf{J}]$.

Problème

I. Matrices positives

Dans cette partie on prouve quelques propriétés élémentaires et basiques des matrices positives.

1) Vérifier que si $A \in \mathbf{M}_n$ est positive et $S \in \mathbf{M}_{n,p}$, alors $S^*AS \geq 0$.

2) Montrer que si $A \geq B$ et $S \in \mathbf{M}_{n,p}$, alors $S^*AS \geq S^*BS$.

3) En déduire que si $A \in \mathbf{M}_p$, $B \in \mathbf{M}_{p;q}$, $D \in \mathbf{M}_q$ avec $M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \geq 0$, alors $A \geq 0$.

4) Plus généralement, montrer que si $M \geq 0$ et $J \subseteq \{1, 2, ..., n\}$, alors $M^J \geq 0$.

5) Soit $A \in \mathbf{M}_n$ une matrice positive.

a) On suppose $n = 2$ et on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que $a, d \in \mathbb{R}^+$ et que $b = \overline{c}$.

b) On suppose que $n \geq 2$ est quelconque. Montrer que A est hermitienne.

6) Vérifier que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

sont positives. Qu'en est-il pour AB?

7) Montrer que si $A \geq 0$ et $B > 0$ et $AB = BA$ alors $AB \geq 0$.

8) Soit $B \in \mathbf{M}_n$ vérifiant $0 < B \leq I_n$. Montrer que $I_n - B \leq \dfrac{1}{4}B^{-1}$.

II. Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité de Weilandt

On prouve dans cette partie une variante de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on donne comme application l'inégalité de Weilandt.

1) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & c \end{pmatrix}$ une matrice positive non nulle. Notons λ et μ les valeurs propres de A avec $\lambda \leq \mu$.

a) Exprimer λ et μ en fonction de a, b et c.

b) Montrer que

$$ac \leq \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda}\right)^2 |b|^2,$$

avec égalité si et seulement si $a = c$ ou A est non inversible.

2) On fixe $x, y \in \mathbb{C}^n$ et on note α et β les valeurs propres de la matrice $\mathrm{Gr}\,(x, y) := \begin{pmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y\rangle \\ \langle y, x\rangle & \langle y, y\rangle \end{pmatrix}$ avec $\beta \leq \alpha$. Montrer que

$$|\langle x, y\rangle| \leq K \,\|x\|\, \|y\| \quad \text{où} \quad K = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}.$$

3) Montrer que l'égalité n'a lieu que si $\|x\| = \|y\|$ ou (x, y) est lié.

4) Soit $A \in \mathbf{M}_n^+$ et notons par $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A. Soit $x, y \in \mathbb{C}^n$ orthogonaux unitaires et $Z = [x, y] = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,2}$.

a) Que vaut Z^*Z ?

b) Montrer que la matrice $N = Z^*AZ$ est positive et vérifie $\lambda_1 I_n \leq N \leq \lambda_n I_n$.

c) En déduire l'inégalité de **Weilandt** suivante

$$|x^*Ay|^2 \leq \left(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_n}\right)^2 (x^*Ax)\,(y^*Ay)\,.$$

———— Fin de l'épreuve ————

Concours d'accès au cycle préparatoire aux concours d'agrégation de mathématiques

Première épreuve — Session 2016

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel éléctronique est strictement interdit.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations et Rappels

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $T-$périodique, de classe C^1. Alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et on a :
$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{T}nt}, \quad \text{où} \quad c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{T}nx}\, dx.$$

2. <u>Identité de Parseval</u> : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $T-$périodique et de carré intégrable sur $[0, T]$. Alors
$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\, dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_{-n}(f)|^2.$$

3. <u>Théorème de Cauchy Lipschitz : Cas linéaire.</u>
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a, b et $c : I \to \mathbb{C}$ trois applications continues sur I. Alors pour tout $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{C}^2$, il existe une unique solution y définie sur I du problème de Cauchy
$$y''(t) + a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) = c(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1.$$

Exercice

On dit qu'un espace métrique X a la propriété des points fixes (PPF) si toute application continue $f : X \longrightarrow X$ admet un point fixe. On dit que les espaces X et Y sont homéomorphes s'il existe une application $f : X \longrightarrow Y$ bijective continue ainsi que sa réciproque (on dit que f est un homéomorphisme).

1) Montrer que si X a la (PPF) et Y est homéomorphe à X alors Y a la (PPF).

2) Montrer qu'un segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ a la (PPF). Qu'en est-il pour $]0, 1[$?

3) Montrer que $\mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \; ; \quad |z| = 1\}$ n'a pas la (PPF).

4) Montrer que le demi-cercle $\mathcal{F} = \left\{\mathrm{e}^{it} \; ; \quad 0 \leq t \leq \pi\right\}$ a la (PPF).

5) On suppose que X est union disjointe des deux ouverts non vides A et B et soit $a \in A$, $b \in B$. On définit $f : X \longrightarrow X$ par $f(x) = b$ si $x \in A$ et $f(x) = a$ si $x \in B$. Montrer que f est continue.

6) Montrer que si X a la (PPF), alors X est connexe.

7) La réciproque de **6)** est-elle vraie?

8) Soit A et B deux fermés d'un espace métrique X qui ont la (PPF).

- **i)** Est-il vrai que $A \cup B$ a la (PPF) ?
- **ii)** Montrer que si $A \cap B$ est réduit à un point, alors $A \cup B$ a la (PPF).

Problème

Soit $q : I \to \mathbb{C}$ une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$y''(t) + q(t)\, y(t) = 0\,. \tag{1}$$

I. Préliminaires

1) Résoudre l'équation (1) et déterminer la dimension de l'espace des solutions dans le cas où $I = \mathbb{R}$ et l'application q est constante réelle i.e. $q(t) = \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$

2) Démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation (1) est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension deux.

II. Cas où q est intégrable

On suppose dans cette partie que $q : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est intégrable et on se propose de démontrer que l'équation (1) possède au moins une solution non bornée.

1) Soit y une solution bornée de (1).

- **a)** Montrer que y' admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

b) Démontrer que $\ell = 0$. (*On pourra raisonner par l'absurde en supposant que* $\ell \neq 0$.)

2) On suppose que toute solution de (1) est bornée. Soit (y_1, y_2) une base de solutions de (1). On pose

$$w(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}.$$

a) Démontrer que w est une fonction constante non nulle.

b) Calculer la limite de $w(t)$ quand $t \to +\infty$, et conclure.

III. Cas où $q(t) = \mathrm{e}^{it}$

On prend dans cette partie $q(t) = \mathrm{e}^{it}$.

1) Soit $y(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(y)\,\mathrm{e}^{int}$ une solution $2\pi-$périodique de (1).

a) Calculer $c_n(y'')$ en fonction de $c_n(y)$ et en déduire que $c_{n-1}(y) = n^2 c_n(y)$.

b) Déduire que

$$y(t) = c_0(y) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{int}}{(n!)^2}.$$

2) On suppose que $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une solution $T-$périodique non nulle de (1).

a) Vérifier que y'' est $T-$périodique et que $T \in 2\pi\mathbb{Z}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $T = 2\pi p$.

b) En déduire que

$$y(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(y)\,\mathrm{e}^{i\frac{n}{p}t}.$$

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_{n-p}(y) = \frac{n^2}{p^2} c_n(y)$.

d) On suppose qu'il existe $n_0 < 0$ tel que $c_{n_0}(y) \neq 0$. Vérifier que

$$c_{n_0-kp}(y) = v_k c_{n_0}(y) \quad \text{où} \quad v_k = \frac{n_0^2 (n_0-p)^2 \ldots (n_0-(k-1)p)^2}{p^{2k}}.$$

e) Calculer $\left|\frac{v_{k+1}}{v_k}\right|$ et en déduire que la suite $(c_{-n}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée, puis conclure que

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(y)\,\mathrm{e}^{i\frac{n}{p}t}.$$

f) Démontrer par récurrence sur n que pour $j \in \{1, 2, ..., p-1\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $c_{j+np}(y) = 0$.

g) Déduire que y est $2\pi-$périodique.

3) Démontrer que l'équation (1) possède au moins une solution non périodique.

IV. Cas où $q(t) = t^2$

Dans la suite du problème on suppose que $I = \mathbb{R}$ et que $q(t) = t^2$.
Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution non identiquement nulle de (1).

1) On pose $v(t) = u(-t)$. Vérifier que v est une solution de (1).

2) En déduire que u est paire si et seulement si $u'(0) = 0$.

3) On pose $f(t) = (u(t))^2 + \frac{1}{t^2}(u'(t))^2$. Vérifier que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

4) Déduire que toute solution de (1) est bornée.

On se propose maintenant d'étudier les zéros de la solution u. Pour cela on pose

$$\mathcal{Z} = \Big\{t > 0 \text{ tel que } u(t) = 0\Big\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}' = \Big\{t > 0 \text{ tel que } u'(t) = 0\Big\}.$$

5) Montrer que $\mathcal{Z} \cap \mathcal{Z}' = \emptyset$.

6) Soit $t \in \mathcal{Z}$. On suppose qu'il existe une suite $(t_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{Z} \backslash \{t\}$ convergeant vers t. Montrer que $t \in \mathcal{Z}'$ et en déduire qu'il existe $r > 0$ tel que $]t - r, t + r[\cap \mathcal{Z} = \{t\}$.

On fixe un nombre réel $\alpha > 0$, et on veut démontrer que u s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]\alpha, \alpha + \frac{\pi}{\alpha}[$.

7) Donner une solution non nulle v du problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} y''(t) + \alpha^2 y(t) = 0 \\ y(\alpha) = y\left(\alpha + \frac{\pi}{\alpha}\right) = 0 \end{cases}$$

8) On suppose que pour tout $t \in]\alpha, \alpha + \frac{\pi}{\alpha}[$, on a $u(t) > 0$. On pose

$$w(t) = u(t) - v(t) \quad \text{et} \quad g(t) = w''(t) + \alpha^2 w(t).$$

- **a)** Vérifier que pour tout $t \in]\alpha, \alpha + \frac{\pi}{\alpha}[$, on a $g(t) < 0$.
- **b)** On admet qu'il existe deux réels A et B tels que :

$$w(t) = A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t) + \frac{1}{\alpha}\int_\alpha^t \sin(\alpha(t - x))\, g(x)\, dx.$$

Démontrer que

$$w\left(\alpha + \frac{\pi}{\alpha}\right) + w(\alpha) < 0.$$

9) En déduire que $\mathcal{Z} \cap]\alpha, \alpha + \frac{\pi}{\alpha}[\neq \emptyset$.

———— Fin de l'épreuve ————

Concours d'accès au cycle préparatoire aux concours d'agrégation de mathématiques

Première épreuve — Session 2017

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel éléctronique est strictement interdit.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
N.B : Le sujet est composé de deux problèmes indépendants qui doivent être traités sur deux feuilles séparées.

Problème 1

Partie I : Fonctions de Darboux

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de Darboux si elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (i.e., l'image par f de tout intervalle inclus dans I est un intervalle de $\mathbb{R}$). On admet le résultat suivant

Théorème 1 (Théorème de Darboux)**.** *Soit $f : I \longrightarrow R$ une fonction dérivable. Alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Autrement dit, toute fonction dérivée est de Darboux.*

1. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :
$$g(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & \text{si} \quad x \neq 0\,; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
Montrer que g est de Darboux. Est-elle continue ?
2. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction h_a sur $[0,1]$ par :
$$h_a(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } \ x \in]0;1]\,; \\ a, & \text{x=0}. \end{cases}$$
   (a) Vérifier que h_a n'est pas continue en 0.
   (b) Montrer que si $a \in [-1,1]$ alors h_a est de Darboux.
   (c) Montrer, en utilisant le théorème de Darboux, que l'une des fonctions h_1 ou h_0 n'est pas une fonction dérivée sur $[0,1]$.
   (d) Commenter.

Tournez la page S.V.P.

Partie II : Compacité

Une partie A de $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$) est dite compacte si toute suite à éléments dans A admet une sous-suite convergente vers un élément de A. On rappelle aussi que A est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

On dit qu'une application f conserve la compacité si l'image par f de tout compact est un compact.

3. Montrer que toute partie finie de $\mathbb{R}^d$ est compacte.
4. Montrer que si la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x dans $\mathbb{R}^d$, alors la partie $A = \{x_n : n \geq 0\} \cup \{x\}$ est fermée, puis conclure que A est compacte.
5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ sinon. Montrer que f conserve la compacité.
6. On rappelle le résultat classique suivant : si $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue alors f conserve la compacité.
   (a) En donner une preuve.
   (b) Que dire de la réciproque ?

On vient de voir que si f est continue alors elle vérifie chacune des propriétés suivantes

i) f est de Darboux ; ii) f conserve la compacité,

et qu'aucune de ces conditions n'est équivalente à la continuité.

Dans la question suivante on se propose de montrer que si f vérifie à la fois i) et ii) alors elle est continue.

7. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant i) et ii). Fixons a dans $\mathbb{R}$ et supposons, par l'absurde, que f n'est pas continue en a.
   (a) Justifier que la fonction $x \longmapsto |f(x) - f(a)|$ vérifie i) et ii).
   (b) Prouver qu'il existe $\delta > 0$ et une suite réelle $(x_n)_{n\geq 0}$ tels que
   $$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(x_n) - f(a) > 2\delta.$$
   (c) Montrer qu'il existe une suite (y_n) vérifiant
   $$\lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |f(y_n) - f(a)| = \frac{n+1}{n}\delta.$$
   (d) Conclure en considérant l'ensemble $\{y_n : n \geq 1\} \cup \{a\}$.

Partie III : Fonctions séparément continues

On se donne deux intervalles I et J et une application $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est séparément continue si pour chaque $x \in I$, l'application $t \longmapsto f(x,t)$ est continue et pour chaque $y \in J$, l'applications $t \longmapsto f(t,y)$ est continue.

Tournez la page S.V.P.

8. Montrer que si f est continue alors elle est séparément continue.
9. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy = 0, \\ y/x & \text{si } y < x, \\ x/y & \text{si } y \geq x > 0. \end{cases}$$

Montrer que φ est séparément continue mais qu'elle n'est pas continue.

10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction séparément continue et qui conserve la compacité. On suppose que $f(0,0) = 0$ et qu'il existe $\delta > 0$ et une suite $((a_n, b_n))_{n \geq 0}$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que

$$f(a_n, b_n) > 2\delta, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{n_0} < \delta$ et pour tout $n \geq n_0$, $f(a_n, 0) < \delta$.

(b) Montrer que pour tout $n \geq n_0$, il existe $c_n \in [0, b_n]$ tel que $f(a_n, c_n) = \delta + \dfrac{1}{n}$.

(c) Trouver une contradiction en considérant le compact

$$K = \{(a_n, c_n) : n \geq n_0\} \cup \{(0,0)\}.$$

(d) Conclure alors que f est continue en $(0,0)$.

11. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application séparément continue et qui conserve la compacité. Montrer que g est continue.

Deuxième Problème

Notations

- Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique ($T > 0$) et continue sur $\mathbb{R}$. Les coefficients de f sont définis de f sont donnés par :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\frac{2n\pi}{T}t} dt, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

et sa série de Fourier est donnée par :

$$\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{i\frac{2n\pi}{T}x}.$$

- On rappelle que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f(x) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{i\frac{2n\pi}{T}x}, \qquad t, x \in \mathbb{R},$$

- Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction $\mathfrak{F}(f)$ définie par :

$$\mathfrak{F}(f)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi xt} dt.$$

Tournez la page S.V.P.

Partie I : Préliminaires

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathfrak{F}(f)$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et τ, α, β des réels avec $\tau > 0$. On pose $f_\tau(x) = f(\tau x)$ et $f_{\alpha,\beta}(x) = f(x+\alpha)e^{-2i\pi\beta x}$. Exprmier $\mathfrak{F}(f_\tau)$ et $\mathfrak{F}(f_{\alpha,\beta})$ en fonction de $\mathfrak{F}(f)$.
3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que les fonctions f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
   $$\mathfrak{F}(f')(x) = 2i\pi x \mathfrak{F}(f)(x).$$
4. On suppose que f est continue et que les fonctions f et $h : t \mapsto tf(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathfrak{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que
   $$(\mathfrak{F}(f))'(x) = -2i\pi \mathfrak{F}(h)(x).$$
5. On considère dans cette question la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
   (a) Calculer $\mathfrak{F}(g)(0)$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $$\pi x \mathfrak{F}(g)(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2} dt. \qquad (*)$$
   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$
   $$|\mathfrak{F}(g)(x)| \leq \frac{1}{\pi|x|}.$$
   En déduire les limites de $\mathfrak{F}(g)$ en $\pm\infty$.
   (d) En utilisant la relation (*), montrer que $\mathfrak{F}(g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :
   $$\mathfrak{F}(g)(x) - x(\mathfrak{F}(g))'(x) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\pi xt}}{(1+t^2)^2} dt.$$
   (e) Montrer que $\mathfrak{F}(g)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre que l'on précisera.
   (f) En déduire l'expression de $\mathfrak{F}(g)(x)$.

Tournez la page S.V.P.

Partie II : Formule d'inversion

On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et telles que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ la fonction

$$x \mapsto x^n f^{(m)}(x)$$

est bornée sur $\mathbb{R}$. On fixe un élément f dans $\mathcal{S}$ et on se propose de montrer la formule d'inversion suivante :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(f)(t) e^{2i\pi xt} dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

6. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
   $$\mathfrak{F}(f^{(k)})(x) = (2i\pi x)^k \mathfrak{F}(f)(x).$$
7. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $h_k : t \to t^k f(t)$ est est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   (b) En déduire que $\mathfrak{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,
   $$(\mathfrak{F}(f))^{(k)}(x) = (-2i\pi)^k \mathfrak{F}(h_k)(x).$$
8. Montrer que $\mathfrak{F}(f) \in \mathcal{S}$.
9. On considère la fonction $\tilde{f}$ définie par :
   $$\tilde{f}(x) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n).$$
   (a) Montrer que $\tilde{f}$ est bien définie, 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Déterminer en fonction de $\mathfrak{F}(f)$, les coefficients de Fourier de $\tilde{f}$ et donner **sa** série de Fourier.
   (d) En déduire la formule de Poisson :
   $$\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{F}(f)(n).$$
10. Montrer que pour tous réels x, t, on a :
    $$\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2i\pi nt} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{F}(f)(n+t) e^{2i\pi x(n+t)}.$$
11. Conclure.

Fin de l'épreuve.

Concours d'accès au cycle préparatoire aux concours d'agrégation de mathématiques

Deuxième épreuve — Session 2017

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel éléctronique est strictement interdit.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
N.B : Le sujet est composé de deux problèmes indépendants qui doivent être traités sur deux feuilles séparées.

Problème 1 : Théorème de Kronecker

Notations

- On désigne par n un entier naturel non nul.
- Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est noté par $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$ et l'ensemble de ses valeurs propres par $Sp(A)$.
- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ unitaire (i.e., $a_n = 1$), on note $Z(P)$ l'ensemble des ses racines dans $\mathbb{C}$.
- Pour $z_1, \ldots, z_n$ dans $\mathbb{C}$ et $1 \leq k \leq n$ on note

$$\sigma_k = \sigma_k(z_1, ..., z_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} z_{i_1} z_{i_2} ... z_{i_k}, \qquad (*)$$

- On rappelle que si $z_1, \ldots, z_n$ sont les racines de P alors

$$\sigma_k = (-1)^{n-k} a_{n-k},\ k = 1, \ldots, n \qquad (**)$$

- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme unitaire. On définit la matrice compagnon de P par

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

- On rappelle que $\chi_{C(P)} = (-1)^n P$.

Tournez la page S.V.P.

Le but de ce problème est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1 (Kronecker)**.** *Soit P un polynôme unitaire, de degré n à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On suppose que les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont de module inférieur ou égal à* 1*, et que* 0 *n'est pas racine de P. Alors les racines de P sont des racines de l'unité.*

Partie I : Préliminaires

1. Soit $P = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ et z_1, z_2, z_3 ses racines dans $\mathbb{C}$. Ecrire a_0, a_1 et a_2 en fonction de z_1, z_2 et z_3.
2. On prend ici $P = X^3 + X^2 + 3X + 2$. Soit z_1, z_2, z_3 ses racines dans $\mathbb{C}$.
   (a) Donner les valeurs de σ_1, σ_2 et σ_3.
   (b) Calculer $S_2 := z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.
   (c) Soit $A = C(P)$. Exprimer $Sp(A)$ et $Sp(A^2)$ en fonction de z_1, z_2 et z_3.
   (d) Calculer A^2 et retrouver S_2.

Partie II : Preuve du Théorème de Kronecker

On note $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des polynômes Q unitaires de degré n et à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tels que $Z(Q) \subset D(0,1) := \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 1\}$. On note $Z(\mathcal{F}_n) = \cup_{Q \in \mathcal{F}_n} Z(Q)$.
Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathcal{F}_n$, $z_1, z_2, ..., z_n$ ses racines dans $\mathbb{C}$, et $M = C(P)$ sa matrice compagnon. Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que la matrice M^j est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
4. Exprimer les valeurs propres de la matrice M^j en fonction de $z_1, \ldots, z_n$.
5. Soit $P_j = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(X - z_k^j\right)$.
   (a) Montrer que $\chi_{M^j} = (-1)^n P_j$.
   (b) En déduire que $P_j \in \mathcal{F}_n$.
6. Montrer que si $z \in Z(\mathcal{F}_n)$ alors $z^k \in Z(A_n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
7. Montrer que
$$|a_k| \leq C_n^k, \qquad \forall k \in \{1, 2, ..., n\},$$
où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (On pourra utiliser (*)).
8. Déduire que l'ensemble $\mathcal{F}_n$ est fini, puis que $Z(\mathcal{F}_n)$ l'est aussi.
9. Démontrer alors le théorème de Kronecker annoncé plus haut.

Tournez la page S.V.P.

Problème 2 : Théorème de Perron

Notations

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\rho(A) = \max\{|\lambda|\,;\lambda \in Sp(A)\}$ le rayon spectral de A.
- Soit $x = {}^t(x_1, x_2, ..., x_n) \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. On note $x \geq 0$ si $\forall i = 1, ..., n,\ x_i \geq 0$ et $x \gg 0$ si $\forall i + 1, ..., n,\ x_i > 0$.
- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On écrit $A \geq 0$ si $a_{ij} \geq 0\ \forall i, j$ et $A \gg 0$ si $a_{i,j} > 0\ \forall i, j$.
- Pour $u, v \in \mathbb{C}^n$, on écrit $u \geq v$ si $u - v \geq 0$ et $u \gg v$ si $u - v \gg 0$.
- Pour $u = {}^t(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}$, on note : $|u| = {}^t(|u_1|, \ldots, |u_n|)$.
- Pour $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, on considère la norme définie par :

$$\|x\| = |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

- On considère la norme subordonnée $\|.\|$ définie sur $M_n(\mathbb{C})$ par :

$$\|M\| = \sup\{\|Mx\|, x \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \text{ et } \|x\| \leq 1\}.$$

- On rappelle que pour tout $(M, N) \in M_n(\mathbb{C})^2$, on a :

$$\|MN\| \leq \|M\|\|N\|.$$

- On admet que le rayon spectral de M vérifie

$$\rho(M) = \lim_{k \to +\infty} \left\|M^k\right\|^{1/k}.$$

Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2 (Perron)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \geq 0$. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^m \gg 0$. Alors :*

(i) $\rho(A)$ *est une valeur propre de A associée à un vecteur propre $u \gg 0$.*

(ii) $\rho(A)$ *est la seule valeur propre de A de module $\rho(A)$.*

(iii) $\rho(A)$ *est une valeur propre simple de A.*

Partie I : Préliminaires

1. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes vérifiant : $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z_1 = |z_1|e^{i\theta}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta}$.
2. En déduire que si $z_1, z_2, ..., z_n$ sont des nombres complexes vérifiant

$$|z_1 + z_2 + ... + z_n| = |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|,$$

alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z_k = |z_k|e^{i\theta}$ pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

3. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Tournez la page S.V.P.

(a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $A \geq 0$.

(ii) pour tout $x \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, si $x \geq 0$ alors $Ax \geq 0$.

(b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $A \gg 0$.

(ii) pour tout $x \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, si $x \geq 0$ alors $Ax \gg 0$.

4. Soit $u, v \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que si $u \gg 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u \gg \varepsilon v$.

Partie II : Un cas particulier du théorème de Perron

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose dans cette partie que $A \gg 0$. Soit $\lambda \in Sp(A)$ tel que $|\lambda| = \rho(A)$ et soit $u \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\|u\| = 1$ et $Au = \lambda u$.

5. Montrer que $A|u| \geq |Au|$, puis que $A|u| \geq \rho(A)|u|$.
On se propose dans la question suivante de montrer que $|u|$ est un vecteur propre de A associé à $\rho(A)$.
6. Supposons par l'absurde que $A\,|u| \neq \rho(A)\,|u|$.
   (a) Montrer que $A\,(A|u| - \rho(A)|u|) \gg 0$.
   (b) Déduire en utilisant **(I- 4)** qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que
   $$A^2|u| - \rho(A)A|u| \geq \varepsilon\rho(A)A|u|.$$
   (c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :
   $$A^k|u| \geq ((1+\varepsilon)\rho(A))^{k-1}A|u|.$$
   (d) Déduire que $\rho(A) \geq (1+\varepsilon)\rho(A)$.
   (e) Conclure.
7. Vérifier que
$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|u_j|, \qquad \forall 1 \leq i \leq n.$$
8. Déduire en utilisant **I-2**, qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $u = \mathrm{e}^{i\gamma}|u|$, puis que $\lambda = \rho(A)$.
9. Soit $w \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $Aw = \rho\,(A)\,w$. On suppose par l'absurde que la famille $(w, |u|)$ est libre.
   (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $w = \mathrm{e}^{i\alpha}|w|$.
   (b) Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que le vecteur $|u| - \beta|w|$ possède une composante nulle et $|u| - \beta|w| \geq 0$.
   (c) Déduire une contradiction, (on pourra utiliser la question **I-3-b**) et conclure que $\rho(A)$ est une valeur propre simple de A.

Tournez la page S.V.P.

Partie III : Preuve du théorème de Perron

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \geq 0$. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m \gg 0$. Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de A avec $\rho(A) = |\lambda_1|$.

10. Montrer que $\rho(A^m) = |\lambda_1|^m$.
11. Soit u un vecteur propre de A associé à λ_1. Vérifier que u est un vecteur propre de A^m.
12. En déduire que $|u| \gg 0$ et que $\lambda_1 = \rho(A)$ est une valeur propre simple de A.

Fin de l'épreuve.

3) Soit ρ un réel strictement positif qu'on fixera ultérieurement et on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^N \text{ quelconque,} \\ x_{n+1} = x_n - \rho\nabla f(x_n), \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \leq \left[\frac{M}{2} - \frac{1}{\rho}\right] \|x_{n+1} - x_n\|^2.$$

Désormais on choisit $\rho \in]0, \frac{2}{M}[$.

b) Montrer que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ puis que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0.$$

c) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - \bar{x}\| = 0$.

2.5 Un exemple de fonction vérifiant les propriétés (2) et (3)

Soient $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^N$ et

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x > . \end{array}$$

1) Montrer que f est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x)$ et $\nabla^2 f(x)$.

2) On suppose de plus que A est symétrique définie positive. Montrer que f vérifie les hypothèses (2) et (3).

3) Déduire que le problème (1) possède une solution unique notée $\bar{x}$ qu'on déterminera en fonction de A et b.

——— Fin de l'épreuve ———

Session 2015 du concours d'accès au cycle prépartoire aux concours d'agrégation de mathématiques

Première épreuve

Durée: 3 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel éléctronique est strictement interdit. **Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.**

$\boxed{\text{NOTATIONS ET RAPPELS}}$

Comme de coutume, l'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ et celui des entiers naturels non nuls est noté $\mathbb{N}^*$. En outre, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Dans tout l'énoncé, $\mathbb{R}^N$ sera muni de son produit scalaire usuel noté $< \cdot, \cdot >$ et par sa norme associée définie par $\|x\| := \sqrt{< x, x >}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. On note par $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées N lignes et N colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On rappelle aussi qu'on dit que $a \in \mathbb{R}^N$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si cette dernière admet une sous-suite qui converge vers a.
Soit $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on note par $Df(x)$ sa différentielle au point x. On note par $\nabla f(x)$ l'unique vecteur de $\mathbb{R}^N$ vérifiant

$$Df(x)(h) =< \nabla f(x), h >, \ \forall h \in \mathbb{R}^N.$$

Si on suppose f deux fois différentiable, on note par $\nabla^2 f(x)$ la matrice hessienne de f au point x.

1 Etude d'une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, \text{ si } x \in [0, n], \\ 0 \text{ si } x > n. \end{cases}$$

1) Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction φ donnée, pour tout $x \geq 0$, par $\varphi(x) = e^{-x}$.
2) a) Soit, pour tout $x \geq 0$, $h(x) = xe^{-x}$. Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$0 \leq h(x) \leq e^{-1}.$$

b) Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on pose

$$g_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, \text{ si } x \in [0, n], \\ e^{-x} \text{ si } x > n. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $x \in [0, n]$, $g_n'(x) = e^{-x}h_n(x)$, avec

$$h_n(x) = -1 + e^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}.$$

c) Calculer $h_n'(x)$, pour $x \in [0, n]$. En déduire qu'il existe $\alpha_n \in [1, n]$ tel que

$$g_n'(\alpha_n) = 0; \qquad \forall x \in]0, \alpha_n[,\ g_n'(x) > 0; \qquad \forall x \in]\alpha_n, n],\ g_n'(x) < 0.$$

d) Montrer que $g_n(\alpha_n) = \frac{1}{n}\alpha_n e^{-\alpha_n}$ et donner le tableau de variation de g_n sur $\mathbb{R}^+$.
e) En déduire que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction φ.
f) Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx.$$

2 Un problème de minimisation

Les trois premières parties sont indépendantes l'une de l'autre. Les résultats démontrés dans ces parties seront utilisés dans la quatrième partie.

2.1 Unicité de valeur d'adherence et convergence

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de points de $\mathbb{R}^N$ et on suppose qu'elle admet une unique valeur d'adhérence qu'on note par l. Montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

2.2 Une fonction continue et coercive atteint son minimum

Soit $h : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue vérifiant

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} h(x) = +\infty.$$

Soit $K = \{x \in \mathbb{R}^N / h(x) \leq h(0)\}$.
1) Montrer qu'il existe $a \in K$ tel que $h(x) \geq h(a)$ pour tout $x \in K$.
2) En déduire que $h(x) \geq h(a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

2.3 Fonctions convexes

Soit $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On rappelle qu'on dit que f est convexe sur $\mathbb{R}^N$ si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

On suppose que f est différentiable sur $\mathbb{R}^N$. Le but de cette partie est de montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe sur $\mathbb{R}^N$;

(ii) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N,\ f(x) \geq f(y) + < \nabla f(y), x - y >$;

(iii) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N,\ < \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x > \geq 0$.

1) On suppose que (i) est vérifiée. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et on définit la fonction

$$\begin{aligned} g : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto g(\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda f(x) - (1-\lambda)f(y). \end{aligned}$$

a) Montrer que g est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer $g'(\lambda)$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.
b) Vérifier que $g_d'(0) \leq 0$ où $g_d'(0)$ désigne la dérivée à droite en 0.
c) En déduire que (i) $\Longrightarrow$ (ii).
2) Montrer que (ii) $\Longrightarrow$ (iii).
On admet que (iii) $\Longrightarrow$ (i).

2.4 La méthode du gradient

Soit $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On considère le problème de minimisation suivant :

$$\min\{f(x),\ x \in \mathbb{R}^N\}. \tag{1}$$

On dit que $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ est solution de (1) si pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $f(x) \geq f(\bar{x})$.
1) On suppose que f est convexe et différentiable sur $\mathbb{R}^N$. Montrer que : $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ est solution de (1) si et seulement si $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

Désormais on suppose que f est deux fois différentiable et qu'elle vérifie les deux hypothèses suivantes :

$$\exists \alpha > 0 / \quad < \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y > \geq \alpha\|x - y\|^2,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^N; \tag{2}$$

$$\exists M > 0 / \ \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall h \in \mathbb{R}^N \quad < \nabla^2 f(x) \cdot h, h > \leq M\|h\|^2. \tag{3}$$

2) a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, on a

$$f(x) \geq f(y) + < \nabla f(y), x - y > + \frac{\alpha}{2}\|x - y\|^2.$$

(Indication : On pourra remarquer que $f(x) - f(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt}[f(y + t(x - y))]\, dt = ...$)
b) Montrer que le problème (1) admet une solution unique. On note $\bar{x}$ cette solution.

(d) Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\left[\begin{array}{c|c} C & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right]$ avec $C = C_V$.
(Indication : Compléter $(e, Ae, ..., A^{p-1}e)$ en une base $(x_1, x_2, .., x_n)$ de $\mathbb{C}^n$.)

2. Soit alors $A' = \begin{bmatrix} C & B' \\ 0 & D \end{bmatrix}$ où $B' = B + C\,Y - Y\,D$ et $B, B', Y \in \mathcal{M}_{p,\, n-p}$.

(a) Soient respectivement $(Y_i)_{i=1}^p$, $(B_i)_{i=1}^p$et $(B'_i)_{i=1}^p$ les lignes blocs de Y, B et B' et posons $Y_0 = 0$. Montrer avec des produits par blocs que

$$B'_i = B_i + Y_{i-1} + v_i\, Y_p - Y_i.D, \qquad 1 \leq i \leq p.$$

(b) Prouver que A est semblable à une matrice $K = \begin{bmatrix} C & Z \\ 0 & D \end{bmatrix}$, avec $Z = \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. On veut prouver que $L = 0$.

a. Supposons $L \neq 0$, par exemple $L = (*, .., *, 1)$, et soit $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$.

Montrer que la famille $(Ke_n, K^2e_n, ..., K^pe_n, e_n)$ est libre.

b. Conclure alors que A est semblable à $\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$.

Partie III : Divisibilité des polynômes minimaux des blocs.

On se place dans les conditions de la conclusion précédente, et sans perte de généralité on peut supposer que

$$A = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

Pour achever la preuve par récurrence on a besoin de montrer que π_D divise π_C. Notons d'abord que

$$\pi_C(X) = X^{\,p} - \sum_{i=1}^{p} v_i\, X^{\,i-1}.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $w \in \mathbb{C}^{n-p}$ tel que $\pi_C(D)\,w \neq 0$. On pose $u = \begin{bmatrix} z & w \end{bmatrix}^T$ avec $z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$.

1. Exprimer Au en fonction de C, D, z et w.

2. Montrer que

$$\begin{bmatrix} u & Au & \dots & A^{p-1}u & \pi_C(A)\,u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ * & \pi_C(D)\,w \end{bmatrix}.$$

3. Conclure.

——— Fin de l'épreuve ———

Institut préparatoire aux études scientifiques et techniques La Marsa

Session 2015 du concours d'accès au cycle prépartoire aux concours d'agrégation de mathématiques

Deuxième épreuve

Durée: 3 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel éléctronique est strictement interdit. **Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.**

Exercice

Soit G un groupe fini de cardinal $|G| = n$. On note $Z(G)$ le centre de G donné par :

$$Z(G) = \{x \in G,\ xa = ax\ \forall a \in G\}.$$

Si X est une partie de G, on note par $\langle X \rangle$ le sous-groupe engendré par X.
Si H est un sous-groupe de G et $x \in G$, alors le conjugué de H par x sera noté H^x :

$$H^x = xHx^{-1}$$

et le normalisateur de H dans G sera noté $N_G(H)$:

$$N_G(H) = \{x \in G : H^x = H\}.$$

On rappelle que le nombre de conjugués de H dans G est égal à l'indice de son normalisateur

$$[G : N_G(H)] = \frac{|G|}{|N_G(H)|}.$$

Si H est un sous-groupe de G on écrit $H \leq G$ et si H est distingué on écrit $H \trianglelefteq G$. On dira qu'un sous-groupe H est propre si $\{1\} \subsetneq H \subsetneq G$, où 1 désigne l'élément neutre de G.

1. Vérifier que si $H \leq G$, alors $N_G(H) \leq G$.
2. Vérifier que si $H \leq G$, alors $H \trianglelefteq N_G(H)$.
3. Soit A un sous-groupe de $Z(G)$.
   (a) Montrer que $A \trianglelefteq G$.
   (b) Montrer que si $a \in G$ et $x, y \in Z(G)$ alors $xa^p ya^q = ya^q xa^p$. $(p, q \in \mathbb{N})$.
   (c) Montrer que si le groupe quotient G/A est cyclique, alors G est abélien.
4. Soit $H \leq G$ de cardinal $d > 1$. On suppose que $H^x \cap H = \{1\}$ pour tout $x \in G \setminus H$.
   (a) Prouver que H possède $\dfrac{n}{d}$ conjugués.
   (b) Soient x et y deux éléments de G. Montrer que si $H^x \neq H^y$, alors $H^x \cap H^y = \{1\}$.
   (c) Prouver que le cardinal de $G \setminus \bigcup_{x \in G} H^x$ vaut $\dfrac{n}{d} - 1$.
5. Soit A et B deux sous-groupes abéliens de G.
   (a) Vérifier que $A \cap B \subset Z(\langle A \cup B \rangle)$.
   (b) En déduire que $A \cap B \trianglelefteq \langle A \cup B \rangle$.

   On dit qu'un sous-groupe M de G est maximal si $M \subsetneq G$ et M et G sont les seuls sous-groupes de G qui contiennent M.
   Un groupe G est dit simple si ses seuls sous-groupes distingués sont $\{1\}$ et lui-même.
6. On suppose que G est non cyclique et que tout sous-groupe propre de G est abélien. On se propose de montrer que G n'est pas simple. On raisonne par l'absurde et on suppose le contraire. Soit A un sous-groupe maximal de G.
   (a) Vérifier que $N_G(A) = A$.
   (b) Soit $x \notin A$. Montrer que $A \cap A^x = \{1\}$.
   (c) Soit $u \notin \bigcup_x A^x$ et B un sous-groupe maximal de G contenant u. Montrer que
   $$\forall x, y \in G, \quad A^x \cap B^y = \{1\}.$$
   (d) Montrer alors que $\left|\bigcup_x A^x \cup \bigcup_y B^y\right| > n$ et conclure.

Problème

Notations : On note $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes et par $\mathcal{M}_{n,p} = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices n lignes p colonnes à coefficients complexes.
On rappelle que si B est une matrice et si L_i désigne la i−ème ligne de B, alors L_iA est la i−ème ligne de BA. Autrement dit on a la formule

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}}_{\text{Matrice en ligne}} \times A = \begin{bmatrix} L_1A \\ \vdots \\ L_nA \end{bmatrix}.$$

On a aussi une formule analogue pour les colonnes :

$$A \times \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_p \end{bmatrix}}_{\text{Matrice en colonne}} = \begin{bmatrix} AC_1 & AC_2 & \dots & AC_p \end{bmatrix}.$$

Pour chaque vecteur $V = (v_1, .., v_p)^T \in \mathbb{C}^p$ on associe la matrice compagnon

$$C_V = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & v_1 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & v_{p-1} \\ 0 & \cdots 0 & 1 & v_p \end{pmatrix}.$$

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ on note π_A le polynôme minimal de A; c'est à dire l'unique polynôme unitaire vérifiant

$$\mathbb{C}[X].\pi_A = \{P \in \mathbb{C}[X] : P(A) = 0\}.$$

Le but de ce problème est de prouver que toute matrice de $\mathcal{M}_n$ est semblable à une matrice diagonale par blocs $\operatorname{diag}(C_1, ..., C_q)$ avec π_{C_k} divise $\pi_{C_{k-1}}$ si $2 \leq k \leq q$.

Partie I : Opération matricielle par blocs.

1. On pose pour $Y \in \mathcal{M}_{p,n-p}$,
   $$P_Y = \begin{bmatrix} I_p & Y \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix}.$$
   Trouver une matrice $Z \in \mathcal{M}_{p,n-p}$ vérifiant $P_Y P_Z = I_n$.
2. Déduire que les matrices $\begin{bmatrix} C & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} C & B' \\ 0 & D \end{bmatrix}$ sont semblables, où $C \in \mathcal{M}_p$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}$ et $B' = B + CY - YD$.

Partie II : Apparition du premier bloc compagnon et annulation du bloc extradiagonal.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n$ et notons pour $u \in \mathbb{C}^n$, $F_u = \operatorname{Vect}\{A^k u : k \in \mathbb{N}\}$.
   (a) Justifier l'existence de $e \in \mathbb{C}^n$ tel que $\dim F_e \geq \dim F_u$ $\forall u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.
   (b) Prouver que $(e, Ae, ..., A^k e)$ est une famille libre de F_e pour tout $k < p$ avec $p = \dim F_e$.
   (c) Justifier l'existence de $V = (v_1, .., v_p) \in \mathbb{C}^p$ tel que
   $$A^p e = v_1 e + v_2 Ae + .. + v_p A^{p-1} e.$$